Максимальное количество баллов за олимпиаду — 72
Максимальный балл за задание — 12

Задание 1.

Три модели ИИ (искусственного интеллекта) обработали одни и те же 100 запросов. Каждый запрос какими-то двумя моделями обработан верно, а оставшейся моделью — неверно. Известно, что первая модель верно обработала 67 запросов, а вторая — 85 запросов. Сколько запросов верно обработала третья модель?

Ответ. 48.

Критерии оценивания. Верный ответ — 12 баллов; неверный или отсутствующий ответ — 0 баллов.

Решение.

Всего верно обработанных запросов $2 \cdot 100 = 200$. На третью модель приходится $200 - 85 - 67 = 48$ таких запросов.

Задание 2.

Представим, что натуральное число изменяют по следующему алгоритму: если число делится на 6, к нему добавляют 12; если число не делится на 2, из него вычитают 5; во всех остальных случаях добавляют 8. Было выполнено несколько, причём более одного, шагов такого алгоритма, и в результате получилось число 70. Какое число могло быть изначально?

Ответ. 67.

Критерии оценивания. Верный ответ — 12 баллов; неверный или отсутствующий ответ — 0 баллов.

Решение.

Заметим, что после первого шага число становится чётным, поэтому вычитание 5 могло быть лишь первым шагом. После добавления 12 число все время будет делиться на 6 и 70 не получится, поэтому таких шагов не было вовсе.

Итого последний шаг был $62 + 8 = 70$. Предыдущий шаг не мог быть $54 + 8 = 62$, поскольку 54 кратно 6, поэтому для этого шага есть только вариант $67 - 5 = 62$. В силу сказанного выше изначальное число может быть лишь 67.

Задание 3.

На круговой гирлянде 211 лампочек, каждая либо горит, либо не горит. Лампочки одновременно меняют своё состояние каждую секунду по следующему правилу пяти ближайших соседей. Рассмотрим лампочку Л, две соседние справа и слева лампочки. Если среди них горящих лампочек больше, чем не горящих, в следующую секунду лампочка Л загорится. В противном случае в следующую секунду лампочка Л не горит. В некоторый момент оказалось, что горят все лампочки. Какое наименьшее число лампочек могло гореть секунду назад?

Ответ. 127.

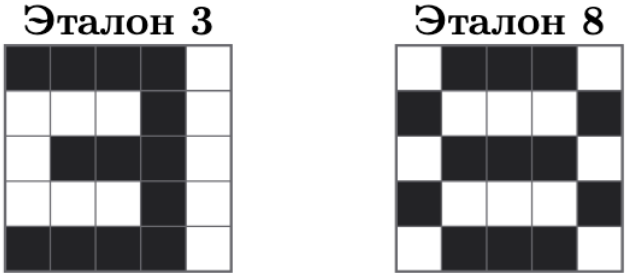
Критерии оценивания. Верный ответ — 12 баллов; неверный или отсутствующий ответ — 0 баллов.

Решение.

Ясно, что секунду назад горела хотя бы одна лампочка. Остальные 210 лампочек разбиваются на 42 группы по пять лампочек подряд. В каждой такой группе хотя бы три лампочки должно гореть, в противном случае центральная лампочка не горела бы секунду спустя. Итого горящих лампочек было хотя бы $42 \cdot 3 + 1 = 127$. Ровно столько лампочек гореть могло, например, так. Представим, что лампочек 210, причём чередуются три горящих и две негорящих. Остается добавить дополнительную горящую лампочку, скажем, между какими-то двумя не горящими. Легко видеть, что приведённый пример содержит 127 горящих лампочек и подходит под все условия.

Задание 4.

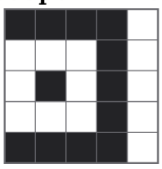
Модель искусственного интеллекта различает пиксельные цифры 3 и 8. Для каждой цифры у модели есть эталонное изображение:



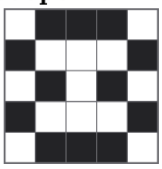
Расстоянием между двумя изображениями называется число клеток, цвет которых на этих изображениях различается. Модель сравнивает новое изображение с обоими эталонами и выбирает цифру с меньшим расстоянием. Если расстояния равны, модель выбирает цифру 8.

Модели предложили три новых изображения:

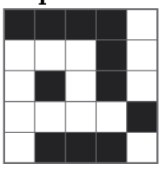
Изображение A



Изображение B



Изображение C



Позже к ним также добавили изображение D, которое отличается от изображения C на одну клетку: верхняя левая клетка изменена с чёрной на белую.

Заполните таблицу.

	Изображение A	Изображение B	Изображение C	Изображение D
Расстояние до эталона 3				
Расстояние до эталона 8				
Какую цифру выберет модель?				

Ответ. Для первого изображения: расстояния $1, 9$, выбрана цифра 3; для второго: $9, 1$, выбрана 8; для третьего: $4, 6$, выбрана 3; после изменений: $5, 5$, выбрана 8.

Критерии оценивания. По 1 баллу за каждое из восьми верных расстояний и по 1 баллу за каждую из четырёх верно выбранных цифр. Баллы за пункты суммируются, максимум — 12. За неверный или отсутствующий ответ на отдельно оцениваемый пункт — 0 баллов, если частичное оценивание не указано отдельно.

Решение.

1. Изображение A отличается от эталона 3 только в центральной клетке, поэтому расстояние до эталона 3 равно 1.

   От эталона 8 оно отличается в 9 клетках. Меньшее расстояние получается до цифры 3.

   Ответ: расстояния 1 и 9; модель выберет 3.

2. Изображение B отличается от эталона 3 в 9 клетках, а от эталона 8 — только в центральной клетке. Поэтому модель выберет 8.

   Ответ: расстояния 9 и 1; модель выберет 8.

3. Для изображения C расстояние до эталона 3 равно 4, а до эталона 8 — 6. Меньшее расстояние получается до цифры 3.

   Ответ: расстояния 4 и 6; модель выберет 3.

4. Верхняя левая клетка в эталоне 3 чёрная, а в эталоне 8 — белая. После изменения изображения C его расстояние до эталона 3 увеличится на 1, а до эталона 8 уменьшится на 1:

   $$d_3 = 4 + 1 = 5, \qquad d_8 = 6 - 1 = 5.$$

   Расстояния равны, поэтому по правилу из условия модель выберет 8.

   Ответ: расстояния 5 и 5; модель выберет 8.

Задание 5.

Модель искусственного интеллекта исправляет опечатки в словах. В её словаре находятся только четыре слова, записанные в таком порядке:

1. КОТ

2. КИТ

3. РОТ

4. КОД

Все слова состоят из трёх букв. Расстоянием между двумя словами модель называет количество позиций, в которых буквы различаются. Например, расстояние между словами КОТ и КИТ равно 1, между КОТ и РОТ — 1, а между КОТ и РИД — 3.

Получив неизвестное слово, модель выбирает словарное слово с наименьшим расстоянием. Если минимальное расстояние одинаково для нескольких слов, модель выбирает то, которое стоит раньше в словаре.

Рассмотрим слова КАТ, РОД, КОД.

Заполните таблицу расстояний.

Слово	КОТ	КИТ	РОТ	КОД
КАТ				
РОД				

На какое словарное слово модель исправит каждое из этих слов?

КАТ	РОД	КОД

В слове КАТ разрешается изменить ровно одну букву. После изменения модель должна выбрать слово КОД. Запишите получившееся трёхбуквенное слово.

В слове КАТ разрешается заменить ровно одну букву на другую букву русского алфавита. В русском алфавите 33 буквы, поэтому существует $3 \cdot 32 = 96$ таких замен. Для скольких из этих 96 замен модель выберет слово КОТ?

Ответ. Расстояния для КАТ: $1, 1, 2, 2$; для РОД: $2, 3, 1, 1$. Результаты исправления: КОТ, РОТ, КОД. Новое слово — КАД; 93 замены.

Критерии оценивания. По 0,5 балла за каждое из восьми верных расстояний (всего 4). За три результата исправления: все верны — 2 балла, одна ошибка — 1 балл, иначе — 0. За слово КАД — 2 балла; за число замен — 4 балла. Баллы за пункты суммируются, максимум — 12. За неверный или отсутствующий ответ на отдельно оцениваемый пункт — 0 баллов, если частичное оценивание не указано отдельно.

Решение.

1. Сравним буквы на соответствующих позициях:

Слово	**КОТ**	**КИТ**	**РОТ**	**КОД**
КАТ	1	1	2	2
РОД	2	3	1	1

   Ответ: для КАТ — 1, 1, 2, 2; для РОД — 2, 3, 1, 1.

2. Для КАТ наименьшее расстояние, равное 1, получается до КОТ и КИТ. Раньше в словаре стоит КОТ. Для РОД наименьшее расстояние, равное 1, получается до РОТ и КОД; раньше стоит РОТ. Слово КОД уже находится в словаре, и расстояние до него равно 0.

   Ответ: КАТ → КОТ; РОД → РОТ; КОД → КОД.

3. Нужно заменить последнюю букву: КАТ → КАД. Расстояние от КАД до КОД равно 1, а до слов КОТ, КИТ и РОТ — 2, 2 и 3 соответственно. Поэтому модель выберет КОД.

   Покажем, что другого ответа нет. Если изменить первую букву, то расстояние до КОД будет равно 3, поэтому КОД не может оказаться ближайшим словом. Если изменить вторую букву, расстояние до КОД останется не меньше 2, а до КОТ будет не больше 1. Наконец, при изменении третьей буквы только буква Д делает расстояние до КОД равным 1; с любой другой буквой КОД не обойдёт КОТ, которое стоит раньше в словаре.

   Ответ: КАД.

4. Для каждой позиции существует 32 возможные замены: вместо исходной буквы можно поставить любую из остальных 32 букв русского алфавита.

Если заменить первую букву, получится слово вида `_AT`. Для слова РАТ расстояние до РОТ равно 1, поэтому модель выберет РОТ. Для любого другого такого слова расстояния до КОТ, КИТ и РОТ равны 2, а расстояние до КОД равно 3. При равенстве модель выбирает КОТ, поскольку оно стоит в словаре раньше. Значит, подходят 31 из 32 замен.

Если заменить вторую букву на О, получится слово КОТ и модель выберет КОТ. Если поставить И, получится КИТ и модель выберет КИТ. Для каждой из остальных 30 букв расстояния до КОТ и КИТ равны 1, а до РОТ и КОД — 2. При равенстве модель выбирает КОТ, поскольку оно стоит в словаре раньше. Значит, модель выберет КОТ после $1 + 30 = 31$ замены из 32.

Если заменить третью букву, получится слово вида `КА_`. Для слова КАД расстояние до КОД равно 1, поэтому модель выберет КОД. Для любого другого полученного слова расстояния до КОТ, КИТ и КОД равны 2, а расстояние до РОТ равно 3. При равенстве модель выбирает КОТ. Поэтому подходят ещё 31 из 32 замен.

Следовательно, всего подходят

$$31 + 31 + 31 = 93$$

замены.

Ответ: 93 замены.

Задание 6.

Прежде чем работать с текстом, модель искусственного интеллекта разбивает его на части — токены. Сначала каждый символ текста является отдельным токеном. Рассматриваются только непустые тексты. Затем модель выполняет шаги склейки.

На каждом шаге модель выбирает несколько пар соседних токенов и каждую выбранную пару заменяет одним новым токеном. Выбранные пары не должны пересекаться: каждый токен может участвовать не более чем в одной склейке за шаг. За один шаг можно склеить одну пару или сразу несколько.

Например, за один шаг пять токенов [А][Б][В][Г][Д] можно превратить в три токена [АБ][В][ГД], одновременно склеив первую и последнюю пары.

а) Текст содержит 17 символов. Какое наименьшее число токенов может остаться после двух шагов?

б) За какое наименьшее число шагов модель может превратить текст из 17 символов в один токен?

в) Какое наименьшее число символов может быть в тексте, который модель не способна превратить в один токен за 6 шагов или меньше при оптимальном выборе?

Ответ. По порядку вопросов: 5; 5; 65.

Критерии оценивания. По 4 балла за каждый правильный ответ. Баллы за пункты суммируются, максимум — 12. За неверный или отсутствующий ответ на отдельно оцениваемый пункт — 0 баллов, если частичное оценивание не указано отдельно.

Решение.

1. За один шаг 17 токенов можно превратить в 9, склеив 8 пар. Следующим шагом 9 токенов можно превратить в 5.

   Меньше получить нельзя, поскольку за шаг число токенов уменьшается не более чем вдвое с округлением вверх.

   Ответ: 5.

2. При максимальном числе склеек количество токенов изменяется так:

   $$17 \longrightarrow 9 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1.$$

   Поэтому достаточно пяти шагов. За четыре шага получить один токен нельзя: если двигаться в обратную сторону, за каждый шаг число исходных токенов может увеличиться не более чем вдвое, то есть за четыре шага один токен можно получить не более чем из 16 токенов.

   Ответ: 5.

3. За один шаг каждый получившийся токен может объединять не более двух токенов предыдущего шага. Поэтому за 6 шагов один токен может быть получен не более чем из $2^6 = 64$ исходных токенов. Для 64 символов это достижимо: на каждом шаге склеиваем все токены попарно и получаем последовательность

   $$64 \longrightarrow 32 \longrightarrow 16 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1.$$

Если символов меньше 64, на каждом шаге склеиваем максимально возможное число пар. После первого шага останется не больше 32 токенов, затем не больше 16, 8, 4, 2 и 1. Если один токен получился раньше, процесс останавливается. Поэтому любой непустой текст длины не больше 64 можно превратить в один токен не более чем за шесть шагов. Таким образом, минимальное искомое число символов равно $64 + 1 = 65$.

Ответ: 65.

Сириус.Курсы — для тех,
кто хочет знать больше!

